UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Niklas Rohling
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/13S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2013 - Übungsblatt 9
Ausgabe: 02.07.2013, Abgabe: 09.07.2013, Übungen: 11./12.07.2013

Aufgabe 1 : Nicht erweiterbare Produktbasis (unextendible product basis, UPB)

Eine UPB ist ein Satz von orthogonalen Produktzuständen $\{|\psi_i\rangle\,; i = 1, \ldots, n\}$ des (für unsere Betrachtungen) bipartiten Hilbertraums $\mathcal{H} = \mathcal{H_A} \otimes \mathcal{H_B}$, zu dem sich kein weiterer Produktzustand finden lässt, der zu allen Vektoren der UPB orthogonal ist. Die Dimension von $\mathcal{H}$ sei N. Für $n < N$ hat die Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{N-n}\left(\mathbb{1} - \sum_{i=1}^{n} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)$$

ihren Träger im orthogonale Komplement der UPB.

a) Zeigen Sie, dass ρ verschränkt ist.
Hinweis: Zeigen Sie zum Beispiel, dass für jede separable Dichtematrix $\rho_S = \sum_i p_i \rho_{Ai} \otimes \rho_{Bi}$ mit $p_i > 0$, $\sum_i p_i = 1$ die Ungleichung $P_{\text{UPB}}\rho_S P_{\text{UPB}} \neq 0$ gilt. Dabei ist $P_{\text{UPB}} = \sum_{i=1}^{n} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$.

b) Zeigen Sie, dass die partiell Transponierte von ρ positiv ist.

c) Zeigen Sie, dass die Zustände (Bennett *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 5385 (1999))

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle_A \otimes \frac{|0\rangle_B - |1\rangle_B}{\sqrt{2}},$$
$$|\psi_2\rangle = \frac{|0\rangle_A - |1\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes |2\rangle_B\,,$$
$$|\psi_3\rangle = |2\rangle_A \otimes \frac{|1\rangle_B - |2\rangle_B}{\sqrt{2}},$$
$$|\psi_4\rangle = \frac{|1\rangle_A - |2\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle_B\,,$$
$$|\psi_5\rangle = \frac{(|0\rangle_A + |1\rangle_A + |2\rangle_A) \otimes (|0\rangle_B + |1\rangle_B + |2\rangle_B)}{3}$$

für $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B = 3$ eine UPB bilden.

Bemerkung: Damit ist die Existenz eines verschränkten PPT-Zustandes für $\dim \mathcal{H}_A = \dim \mathcal{H}_B = 3$ gezeigt. Für $\dim \mathcal{H}_A \dim \mathcal{H}_B \leq 6$ gibt es keine verschränkten PPT-Zustände, also auch keine UPB mit $n < N$.

Aufgabe 2 : Komprimierung von Quanteninformation (schriftlich, 10 Punkte)

Alice möchte Quanteninformation an Bob schicken und verwendet dabei als Alphabet die beiden (nicht orthogonalen) Zustände $|\phi_\pm\rangle = \cos\frac{\pi}{8}|0\rangle \pm \sin\frac{\pi}{8}|1\rangle$ im zweidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}_2$, die sie jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p_\pm = 1/2$ präpariert. Alice' Quantenbotschaft $|\psi\rangle = |\phi_\pm\rangle_1 |\phi_\pm\rangle_2 |\phi_\pm\rangle_3 \in \mathcal{H}_2^{\otimes 3}$ hat die Länge 3, es gibt also wegen der zwei möglichen Zustände pro Qubit genau acht mögliche Quantenbotschaften. Es sollen aber nur zwei Qubits an Bob gesendet werden. Alice wendet eine unitäre Transformation U auf $|\psi\rangle$ an und führt auf dem dritten Qubit von $U|\psi\rangle$ eine projektive Messung mit zwei möglichen Ergebnissen 0 und 1 und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_0 und $p_1 = 1 - p_0$ aus. Danach sendet sie in Abhängigkeit vom Messergebnis den Zwei-Qubit-Zustand $\left|\psi_i^{\text{kom}}\right\rangle \in \mathcal{H}_2^{\otimes 2}$ $(i = 0, 1)$ an Bob. Bob ergänzt diesen um ein weiteres Qubit $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$ und führt eine unitäre Operation $\tilde{U}$ aus (allerdings ohne Kenntnis von Alice' Messergebnis). Damit erhält er den Quantenzustand $|\zeta_i\rangle = \tilde{U}\left|\psi_i^{\text{kom}}\right\rangle|\chi\rangle$. Die Fidelity (Güte) der Übertragung ist gegeben durch

$$F = \sum_{|\psi\rangle} p(|\psi\rangle) \sum_{i=0,1} p_i |\langle\zeta_i|\psi\rangle|^2.$$

Dabei bedeutet der Ausdruck $\sum_{|\psi\rangle}$, dass über die acht möglichen Quantenbotschaften

$$\{|\psi\rangle = |\phi_+\rangle_1 |\phi_+\rangle_2 |\phi_+\rangle_3 \,, |\psi\rangle = |\phi_+\rangle_1 |\phi_+\rangle_2 |\phi_-\rangle_3 \,, \ldots, |\psi\rangle = |\phi_-\rangle_1 |\phi_-\rangle_2 |\phi_-\rangle_3\}$$

summiert werden muss und $p(|\psi\rangle)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Alice den Zustand $|\psi\rangle$ besessen hat.

a) (3 Punkt) In einer ersten Variante seien $U = \tilde{U} = \mathbb{1}$ und unabhängig vom Messergebnis schickt Alice einfach die ersten beiden Qubits $\left|\psi_0^{\text{kom}}\right\rangle = \left|\psi_1^{\text{kom}}\right\rangle = |\phi_\pm\rangle_1 |\phi_\pm\rangle_2$ an Bob, der folglich den Zustand $|\zeta_0\rangle = |\zeta_1\rangle = |\phi_\pm\rangle_1 |\phi_\pm\rangle_2 |\chi\rangle$ erhält. Für welches $|\chi\rangle$ wird F maximal? Bestimmen Sie diese maximale Fidelity.

b) Betrachten Sie den durch $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |100\rangle\}$ aufgespannten Unterraum Λ. Alice wählt U so, dass ein Zustand $|\lambda\rangle \in \Lambda$ abgebildet wird auf $U|\lambda\rangle = \left|\psi^{\text{kom}}(\lambda)\right\rangle|0\rangle$ mit $\left|\psi^{\text{kom}}(\lambda)\right\rangle \in \mathcal{H}_2^{\otimes 2}$ und Zustände aus dem orthogonalen Komplement $\left|\lambda^\perp\right\rangle \in \Lambda^\perp$ werden zu $U\left|\lambda^\perp\right\rangle = \left|\psi^{\text{kom}}(\lambda^\perp)\right\rangle|1\rangle$. Danach misst Alice das dritte Qubit mit den möglichen Ergebnissen $0 \,\hat{=}\, |0\rangle$ und $1 \,\hat{=}\, |1\rangle$. Im Falle "0" sendet sie $\left|\psi_0^{\text{kom}}\right\rangle = \left|\psi^{\text{kom}}(\lambda)\right\rangle$ und im Falle "1" sendet sie die ersten beiden Qubits von $U|000\rangle$. Hier ist $|\chi\rangle = |0\rangle$ und $\tilde{U} = U^{-1}$. Also erhält Bob im Falle "0" den Zustand $|\zeta_0\rangle = \frac{P_\Lambda|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_\Lambda|\psi\rangle}}$, wobei P_Λ der Projektor auf Λ ist, und im Falle "1" $|\zeta_1\rangle = |000\rangle$.
(i) (5 Punkte) Berechnen Sie F.
(ii) (1 Punkt) Warum werden hier als Basiszustände, mit denen der Unterraum Λ definiert wird, gerade Produktzustände von $|0\rangle$ und $|1\rangle$ gewählt? Wie ist der Zusammenhang zu $|\phi_\pm\rangle$ und $p_\pm$?

c) (1 Punkt) Wie stark lässt sich eine Quantenbotschaft der Länge n im Grenzfall $n \to \infty$ laut Schumacher-Theorem mit obigem Alphabet $\{|\phi_+\rangle, |\phi_-\rangle\}$ und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_+ und p_- komprimieren?