UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Niklas Rohling
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/13S-QI

**Quanteninformationstheorie**
**Sommersemester 2013 - Übungsblatt 8**
Ausgabe: 25.06.2013, Abgabe: 02.07.2013, Übungen: 04./05.07.2013

**Aufgabe 1 : Nielsen-Theorem** (schriftlich, 6 Punkte)

Alice und Bob besitzen einen gemeinsamen Quantenzustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, den sie mittels lokaler Operationen und klassischer Kommunikation (LOCC) manipulieren dürfen. Die Von-Neumann-Entropie $S(\rho_A^\psi)$ mit $\rho_A^\psi = \mathrm{Tr}_B |\psi\rangle\langle\psi|$ ist ein Maß für die Verschränkung von $|\psi\rangle$.
Das Nielsen-Theorem (Nielsen, Phys. Rev. Lett. **83**, 436 (1999)) besagt, dass eine Transformation zu einem anderen reinen Quantenzustand $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit Wahrscheinlichkeit 1 genau dann möglich ist, wenn die Eigenwerte ($\lambda_1^\psi \geq \lambda_2^\psi \geq \cdots \geq \lambda_N^\psi$) von $\rho_A^\psi$ durch die Eigenwerte ($\lambda_1^\phi \geq \lambda_2^\phi \geq \cdots \geq \lambda_N^\phi$) von $\rho_A^\phi$ majorisiert werden, d.h.

$$\sum_{n=1}^{k} \lambda_n^\psi \leq \sum_{n=1}^{k} \lambda_n^\phi \quad \forall k \in \{1, \ldots, N\}.$$

a) (3 Punkte) Betrachten Sie den Zustand

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{|0\rangle_A - |1\rangle_A}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle_B + \sqrt{\frac{1}{3}} |2\rangle_A \otimes |2\rangle_B .$$

Alice führt nun eine projektive Messung mit den Projektionsoperatoren $P_0 = |0\rangle_A\langle 0| + |2\rangle_A\langle 2|$ und $P_1 = \mathbb{1} - P_0 = |1\rangle_A\langle 1|$ aus. Welche Zustände $|\psi_0\rangle$ und $|\psi_1\rangle$ werden dadurch mit welcher Wahrscheinlichkeit erzeugt? Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\rho_A^\psi$, $\rho_A^{\psi_0}$ und $\rho_A^{\psi_1}$ und die zugehörigen Von-Neumann-Entropien. Entscheiden Sie mit Hilfe des Nielsen-Theorems, ob eine Transformation $|\psi\rangle \mapsto |\psi_{0,1}\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit 1 mittels LOCC möglich ist.

b) (3 Punkte) Betrachten Sie nun die Zustände

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{15}{32}} \big[ |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \big] + \frac{1}{\sqrt{32}} \big[ |2\rangle_A \otimes |2\rangle_B + |3\rangle_A \otimes |3\rangle_B \big],$$

$$|\phi\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}} |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{8}} \big[ |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |2\rangle_A \otimes |2\rangle_B \big].$$

Ist $|\psi\rangle \mapsto |\phi\rangle$ oder $|\phi\rangle \mapsto |\psi\rangle$ mittels LOCC und mit Wahrscheinlichkeit 1 möglich? Ist die Abbildungen $|\psi\rangle \otimes |\chi\rangle \mapsto |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$ auf diese Art möglich? Dabei ist

$$|\chi\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}} |\uparrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B$$

ein weiterer zwischen A und B verschränkter Zustand.

**Aufgabe 2 : Concurrence**

Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Definitionen der *Concurrence*, $C := \sqrt{2(1-\mathrm{Tr}(\rho_A^2))}$ und $C := |\langle\psi|\,\theta\,|\psi\rangle|$ für reine Zustände in einem bipartiten Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_A) = 2$. Dabei ist die Wirkung des Operators $\theta$ auf einen Zustand $|\psi\rangle = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \alpha_{10}\,|10\rangle + \alpha_{11}\,|11\rangle$ gegeben durch $\theta\,|\psi\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y\,|\psi\rangle^* = -\alpha_{11}^*\,|00\rangle + \alpha_{10}^*\,|01\rangle + \alpha_{01}^*\,|10\rangle - \alpha_{00}^*\,|11\rangle$ und $\rho_A = \mathrm{Tr}_A\,|\psi\rangle\langle\psi|$ ist wieder die Dichtematrix im Teilsystem A.

**Aufgabe 3 : Eigenschaften der Von-Neumann-Entropie**

Die relative Entropie zweier Dichtematrizen $\rho$ und $\sigma$ ist definiert als

$$S(\rho|\sigma) = \mathrm{Tr}[\rho(\log\rho - \log\sigma)].$$

a) Zeigen Sie $S(\rho|\sigma) \geq 0$.
*Hinweis:* Benutzen Sie, dass die Funktion $f(x) = -x\log x$ konkav ist, d.h. $f(y) - f(x) \leq (y-x)f'(x)$, um zu zeigen, dass $\mathrm{Tr}(f(\hat{B}) - f(\hat{A})) \leq \mathrm{Tr}((\hat{B}-\hat{A})f'(\hat{A}))$ für zwei hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ gilt.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass $S(\rho) \leq \log d$ gilt, wenn $\rho$ eine $d \times d$-Matrix ist.

c) Nutzen Sie a) um die Subadditivität der Von-Neumann-Entropie zu zeigen,

$$S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A) + S(\rho_B).$$

*Hinweis:* Betrachten Sie die relative Entropie der Dichtematrizen $\rho_A \otimes \rho_B$ und $\rho_{AB}$.

d) Zeigen Sie mit Hilfe von c) die Konkavität der Von-Neumann-Entropie, d.h.

$$S\left(\sum_i \lambda_i \rho_i\right) \geq \sum_i \lambda_i S(\rho_i)$$

für $\lambda_i > 0$ und $\sum_i \lambda_i = 1$.
*Hinweis:* Verwenden sie die Subadditivität bezüglich des Zustands $\rho_{AB} = \sum_i \lambda_i (\rho_i)_A \otimes (|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)_B$.

e) Zeigen Sie die Araki-Lieb-Ungleichung (Dreiecksungleichung),

$$S(\rho_{AB}) \geq |S(\rho_A) - S(\rho_B)|.$$

*Hinweis:* Erweitern Sie das System auf ABC mit einem reinen Zustand $|\psi\rangle$, sodass $\rho_{AB} = \mathrm{Tr}_C\,|\psi\rangle\langle\psi|$. Wenden Sie dann die Subadditivität auf $\rho_{BC}$ und $\rho_{AC}$ an.