

## Quanteninformatiostheorie

### Sommersemester 2013 - Übungsblatt 7

Ausgabe: 18.06.2013, Abgabe: 25.06.2013, Übungen: 27./28.06.2013

#### Aufgabe 1 : No-cloning theorem

a) Zeigen Sie, dass das CNOT-Gatter,  $|a\rangle \otimes |0\rangle \mapsto |a\rangle \otimes |a \oplus b\rangle$  verwendet werden kann, um ein klassisches Bit  $a$ , ( $a, b \in \{0, 1\}$ ) zu klonen (d.h. zu kopieren).

b) Ein klassisches Bit lässt sich also kopieren. Jetzt wollen wir untersuchen, ob auch ein Qubit geklont werden kann. Gegeben sei  $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  mit  $|\mathbf{x}| = 1$ . Existiert eine unitäre  $4 \times 4$  Matrix  $U$  mit der Eigenschaft

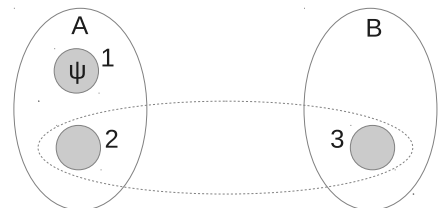
$$U \mathbf{x} \otimes \mathbf{e}_1 = \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} ? \quad (1)$$

Gegenbeweis oder explizite Konstruktion!

c) Dass quantenmechanische Zustände nicht geklont werden können, folgt auch als indirekte Konsequenz der Begrenzung der Geschwindigkeit einer Informationsübertragung (Lichtgeschwindigkeit, vgl. spez. Relativitätstheorie). Betrachten Sie dafür zwei räumlich getrennte aber verschränkte Qubits und nehmen Sie an, dass es einen (lokalen) Operator zum Klonen der Qubits gäbe. Zeigen Sie, wie Information zwischen Alice und Bob durch Messungen und Klonen schneller als Licht übertragen werden könnte.

#### Aufgabe 2 : Quantenteleportation (schriftlich)

Alice möchte den Inhalt ihres Qubits  $|\psi\rangle_1$  an Bob senden (teleportieren). Dafür teilen sich Alice und Bob zwei verschränkte Qubits (2 und 3, siehe Abb.) und wollen nun, dass Bobs Qubit (3) in den Zustand  $|\psi\rangle_3$  übergeht. Betrachten Sie den Quantenzustand  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  mit  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  und bilden Sie den Zustand  $|\phi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\Phi_+\rangle_{23}$



a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass  $|\phi\rangle$  sich als

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \frac{1}{2} |\Phi_+\rangle_{12} \otimes (a|0\rangle + b|1\rangle)_3 + \frac{1}{2} |\Phi_-\rangle_{12} \otimes (a|0\rangle - b|1\rangle)_3 \\ &+ \frac{1}{2} |\Psi_+\rangle_{12} \otimes (a|1\rangle + b|0\rangle)_3 + \frac{1}{2} |\Psi_-\rangle_{12} \otimes (a|1\rangle - b|0\rangle)_3 \end{aligned}$$

schreiben lässt.  $|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}}$  und  $|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}}$  sind hier die *Bell-Zustände* und bilden zusammen die *Bell-Basis*.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, wie eine Messung der zwei ersten Qubits von  $|\phi\rangle$  verwendet werden kann, um den Zustand  $|\psi\rangle$  als drittes Qubit zu bekommen.

c) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass die direkte Erzeugung von Verschränkung nur über einen maximalen Abstand  $l$  möglich wäre. Betrachten Sie die Situation, wo Alice und Bob sich mit einer Entfernung  $2l$  von einander befinden. Dazwischen befindet sich ihr Freund Carl. Alice und Carl teilen sich jetzt ein EPR-Paar und Bob und Carl ein anderes. Der Gesamtzustand lautet also  $|\Phi_+\rangle \otimes |\Phi_+\rangle$ . Zeigen Sie, dass durch Kenntnis über das Ergebnis einer Messung in der Bell-Basis von Carls zwei Qubits und lokale Operationen, ein EPR-Paar zwischen Alice und Bob erzeugt werden kann.

### Aufgabe 3 : Verschränkungsreinigung (schriftlich)

a) (1 Punkt) Betrachten Sie den Dichteoperator für einen *Werner-Zustand*,

$$\rho_W(r) = r |\Phi_+\rangle \langle \Phi_+| + \frac{1-r}{4} \mathbb{1},$$

wo  $0 \leq r \leq 1$ . Geben Sie die Matrixdarstellung von  $\rho_W(r)$  in der Produktbasis  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  an und bestimmen Sie die Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $\rho_W(r)$  und berechnen Sie danach die *Concurrence*

$$C(\rho_W(r)) = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\},$$

mit  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ , als Funktion von  $r$ .

b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Güte (*fidelity*)  $F(r) = \langle \Phi_+ | \rho_W(r) | \Phi_+ \rangle$  und zeigen Sie, dass

$$\rho_W(F) = F |\Phi_+\rangle \langle \Phi_+| + \frac{1-F}{3} (|\Psi_+\rangle \langle \Psi_+| + |\Psi_-\rangle \langle \Psi_-| + |\Phi_-\rangle \langle \Phi_-|).$$

c) (2 Punkte) Betrachten Sie die unitären Matrizen für das bilaterale XOR- (oder CNOT-) Gatter

$$U_{\text{BXOR1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2,$$

$$U_{\text{BXOR2}} = \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und  $U_{\text{BXOR}} = U_{\text{BXOR1}} U_{\text{BXOR2}}$ . Bilden Sie  $\rho = U_{\text{BXOR}} (\rho_W(F) \otimes \rho_W(F)) U_{\text{BXOR}}^\dagger$  und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $p_c$ , dass die zwei letzten Qubits, nach Messung in der Produktbasis, sich in einem der Zustände  $|00\rangle$  oder  $|11\rangle$  befinden.

d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Güte des neuen Zustands,

$$F'(F) = \frac{\text{Tr}\{\rho (|\Phi_+\rangle \langle \Phi_+| \otimes \Pi)\}}{p_c}, \text{ mit } \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie hängt  $\Pi$  mit  $p_c$  zusammen? Was passiert mit  $F'(F)$  für  $1/2 < F < 1$ ?