UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Julia Hildmann
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/13S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2013 - Übungsblatt 6
Ausgabe: 11.06.2013, Abgabe: 18.06.2013, Übungen: 20./21.06.2013

Aufgabe 1: Singulett-Zustand

Betrachten wir den Singulett-Zustand von zwei Spins 1/2:

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2).$$

a) Zeigen Sie, dass $(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)|\Psi_-\rangle = 0$.

b) Was bekommt man für $\langle\Psi_-|\vec{\sigma}_{1(2)}|\Psi_-\rangle$?

c) Benutzen Sie das Ergebnis aus a) und b) um zu zeigen, dass

$$\langle\Psi_-|(\hat{n}\cdot\vec{\sigma}_1)(\hat{m}\cdot\vec{\sigma}_2)|\Psi_-\rangle = -\hat{n}\cdot\hat{m},$$

wo $\hat{n}$ und $\hat{m}$ zwei dreidimensionale Einheitsvektoren sind.

Aufgabe 2: Entanglement witness

Ein "Entanglement witness" W is ein linear Operator auf dem Produkt-Hilbertraum $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, der nicht positiv semidifinit ist, und für alle Produktzustände $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ gilt

$$\langle\psi|W|\psi\rangle \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass der Operator $W = \mathbb{1}_4 - 2|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|$ mit $|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|0\rangle_B + |1\rangle_A|1\rangle_B)$ ein "Entanglement witness" ist.

Aufgabe 3: Gedämpfter harmonischer Oszillator (schriftlich)

Betrachten wir einen harmonischen Oszillator $H_0 = \omega\, a^\dagger a$ ($\hbar = 1$), der mit einem Reservoir wechselwirkt. Wenn das Reservoir nur im Grundzustand ist, kann der harmonische Oszillator nur von einem angeregten Zustand zum nächsten tiefer liegenden Zustand durch Emission eines Photons abgeregt werden und kann keine Photonen absorbieren. Deshalb kann die Dämpfung des Oszillators durch den Lindblad-Operator $L = \sqrt{\Gamma}a$ beschrieben werden, wo Γ die Rate ist, mit welcher der Oszillator vom ersten angeregten Zustand ($n = 1$) zum Grundzustand übergeht ($n = 0$).

a) (2 Punkte) Stellen Sie die Lindblad-Gleichung für den harmonischen Oszillator auf. Gehen Sie zum Wechselwirkungsbild mit H_0 über. Wie sieht die Lindblad-Gleichung für den Dichteoperator im Wechselwirkungsbild ρ_I aus?

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung des Vernichtungsoperators a im Wechselwirkungsbild und des Besetzungszahloperators $n \equiv a^\dagger a$.

c) (2 Punkte) Betrachten wir die Funktion

$$X(\lambda, t) = \mathrm{Tr}[\rho_I(t) \mathrm{e}^{\lambda a^\dagger} \mathrm{e}^{-\lambda^* a}],$$

wo λ eine komplexe Zahl ist. Benutzen Sie die Lindblad-Gleichung für $\dot{\rho}_I$ um eine Differenzialgleichung für $X(\lambda, t)$ aufzustellen und zu lösen. Die Lösung soll in der Form

$$X(\lambda, t) = X(\lambda', 0)$$

sein, wo λ' eine Funktion von λ, Γ und t ist. Was ist die Funktion $\lambda'(\lambda, \Gamma, t)$?

d) (3 Punkte) Nehmen wir an, dass der harmonische Oscillator sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im sogenannten "cat state" befindet:

$$|\mathrm{cat}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle),$$

wo $|\alpha\rangle$ einen kohärenten Zustand bezeichnet:

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger} |0\rangle.$$

α ist eine komplexe Zahl. Benutzen Sie das Ergebnis aus c), um den Dichteoperator zu einem späteren Zeitpunkt t abzuleiten. Mit welcher Rate werden die nichtdiagonalen Terme $|\alpha_1\rangle\langle\alpha_2|$ und $|\alpha_2\rangle\langle\alpha_1|$ von ρ unter der Annahme $\Gamma t \ll 1$ gedämpft?