UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Julia Hildmann
http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/13S-QI

Quanteninformationstheorie
Sommersemester 2013 - Übungsblatt 5
Ausgabe: 28.05.2013, Abgabe: 11.06.2013, Übungen: 13./14.06.2013

Aufgabe 1: Bell-Zustand

Kann der Bell-Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle)$$

als ein Produkt-Zustand dargestellt werden? Was ist die Schmidt-Zahl (oder der Schmidt-Rang) dieses Zustands?

Aufgabe 2: Dekohärenz auf der Bloch-Kugel (schriftlich)

Der Zustand eines Qubits kann immer auf der Bloch-Kugel durch den Bloch-Vektor $\vec{r}$ dargestellt werden,

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}),$$

wobei $\vec{r}$ ist ein dreidimensionaler reeller Vektor ist.

a) (2 Punkte) Nehmen wir an, das Qubit werde mit der Wahrscheinlichkeit p depolarisiert, d. h. durch einen komplett gemischten Zustand $\mathbb{1}/2$ ersetzt. Die Dichte-Operator des Qubits verändert sich durch diese Operation:

$$\rho \to \rho' = (1-p)\rho + \frac{p}{3}(\sigma_1 \rho \sigma_1 + \sigma_2 \rho \sigma_2 + \sigma_3 \rho \sigma_3).$$

Wie verändert sich dabei der Bloch-Vektor?

b) (3 Punkte) Eine Amplituden-Dämpfung kann man z. B. bei der spontanen Emission eines angeregten Atoms beobachten. Mit der Wahrscheinlichkeit p geht das Atom in den Grundzustand $|0\rangle_Q$ über und mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ bleibt es im angeregten Zustand $|1\rangle_Q$. Die unitäre Transformation, die diesen Vorgang beschreibt, ist

$$\begin{aligned} |0\rangle_Q|0\rangle_E &\to |0\rangle_Q|0\rangle_E \\ |1\rangle_Q|0\rangle_E &\to \sqrt{1-p}|1\rangle_Q|0\rangle_E + \sqrt{p}|0\rangle_Q|1\rangle_E. \end{aligned}$$

$|0/1\rangle_E$ beschreibt den Zustand der Umgebung oder hier die Anzahl der ausgestrahlten Photonen. Finden Sie die Kraus-Operatoren, die den Dichte-Operator transformieren. Was passiert mit dem Bloch-Vektor nach der Amplituden-Dämpfung?

c) (3 Punkte) Die Dekohärenz der Phase eines Qubits kann man durch die folgende unitäre Operation beschreiben:

$$\begin{aligned}|0\rangle_Q|0\rangle_E &\rightarrow |0\rangle_Q|0\rangle_E\\ |1\rangle_Q|0\rangle_E &\rightarrow \sqrt{1-p}|1\rangle_Q|0\rangle_E + \sqrt{p}|1\rangle_Q|1\rangle_E.\end{aligned}$$

p gibt die Wahrscheinlichkeit an, ob das Qubit mit der Umgebung wechselwirkt. Finden Sie die entsprechenden Kraus-Operatoren und finden Sie heraus, wie sich dabei der Bloch-Vektor transformiert.

Aufgabe 3: Phasen-Dämpfung

Phasen-Dämpfung ist ein quantenmechanischer Vorgang, bei welchem ein Verlust der Quanteninformation ohne Energienverlust auftritt. Dabei werden die nichtdiagonalen Terme (oder die Kohärenzterme) der Dichtematrix gedämpft. Die Kraus-Operatoren, die den Prozess für ein zweidimensionales System beschreiben, sind gegeben durch

$$M_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{1-\lambda}\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad M_1 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \sqrt{\lambda}\end{pmatrix},$$

wo λ is die Wahrscheinlichkeit, dass die Phase durch die Wechselwirkung mit der Umgebung verloren wird. Zeigen Sie, dass die Quantenschaltung in Abb. (1) denselben Prozess beschreibt, wenn θ richtig ausgewählt ist.

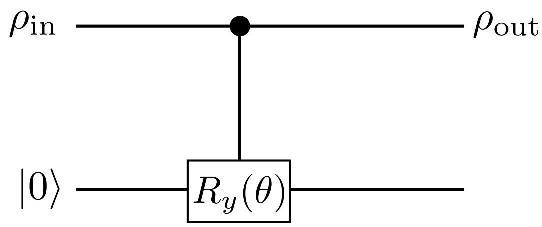

Abbildung 1: Darstellung einer Quantenschaltung für die Phasen-Dämpfung mit einer bedingten Rotation um y-Achse auf der Bloch-Kugel. Die obere Linie beschreibt das Control-Qubit (das System) und die untere Linie beschreibt das Target-Qubit (die Umgebung), das am Anfang den Zustand $|0\rangle$ hat.