

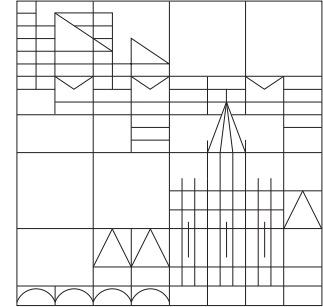
UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard

Erik Welander

<http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/13S-QI>



## Quanteninformationstheorie

### Sommersemester 2013 - Übungsblatt 4

Ausgabe: 21.05.2013, Abgabe: 04.06.2013, Übungen: 06./07.06.2013

#### Aufgabe 1 : Die Blochkugel (schriftlich)

Die Dichtematrix eines Zweizustandsystems kann wie bekannt immer als  $\rho = (\mathbb{1} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})/2$  geschrieben werden.

- (1 Punkt) Berechnen Sie für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{n}$  den Erwartungswert  $\langle \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle$ .
- (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $\rho$  und die zugehörigen Eigenvektoren.
- (2 Punkte) Ein reiner Zustand sei durch

$$|\theta, \varphi\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie auch hier die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\rho = |\theta, \varphi\rangle \langle \theta, \varphi|$ . Was ist  $\mathbf{p}$  für diesen Zustand?

#### Aufgabe 2 : Die reduzierte Dichtematrix (schriftlich)

Gegeben ist ein aus zwei Teilen bestehender (bipartiter) Hilbertraum,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  und ein Zustand  $\rho$ .

- (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die reduzierte Dichtematrix,  $\rho_A = \text{Tr}_B \rho$ , die folgenden Eigenschaften hat:

- $\rho_A$  ist positiv.
- $\text{Tr} \rho_A = 1$ .
- $\rho_A^\dagger = \rho_A$ .

- (2 Punkte) Betrachten Sie jetzt ein Zweiqubitsystem mit  $|ab\rangle = |a\rangle_A \otimes |b\rangle_B$ . Gegeben sei der Zustand

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + \sin \varphi |10\rangle + \cos \varphi |11\rangle).$$

Betrachten Sie den reinen Zustand  $\rho = |\varphi\rangle \langle \varphi|$  und berechnen Sie  $\rho_A$  und  $\rho_B$ .

- (3 Punkte) Verwenden Sie das Ergebnis aus b) und finden Sie die Schmidt-Zerlegung des Zustands  $|\varphi\rangle$ . Überprüfen Sie das Ergebnis!

#### Aufgabe 3 : POVM

Gegeben sind vier Operatoren,

$$F_1 = \frac{1}{2} |\uparrow_z\rangle \langle \uparrow_z|, \quad F_2 = \frac{1}{2} |\downarrow_z\rangle \langle \downarrow_z|, \quad F_3 = \frac{1}{2} |\uparrow_x\rangle \langle \uparrow_x|, \quad F_4 = \frac{1}{2} |\downarrow_x\rangle \langle \downarrow_x|.$$

Zeigen Sie, dass diese POVM als eine orthogonale Messung in einem Zweiqubitsystem unter der Einführung eines weiteren Spins (Hilfs- oder Ancilla-Spin genannt) realisiert werden kann.