

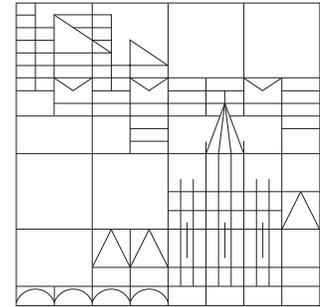
UNIVERSITÄT KONSTANZ

Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard

Niklas Rohling

<http://theorie.physik.uni-konstanz.de/burkard/teaching/13S-QI>



## Quanteninformatiionstheorie

### Sommersemester 2013 - Übungsblatt 1

Ausgabe: 23.04.2013, Abgabe: 30.04.2013, Übungen: 2./3.05.2013

#### Aufgabe 1 : Grenzwert (schriftlich, 1 Punkt)

Zeigen Sie

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \log p = 0.$$

#### Aufgabe 2 : Konkavität der Shannon-Entropie (schriftlich)

a) (2 Punkte) Zeigen Sie die Konkavität der Shannon-Entropie, d. h., beweisen Sie für zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $p_1$  und  $p_2$  über dasselbe Alphabet  $X$ , dass die Shannon-Entropie  $H(p) = -\sum_{x \in X} p(x) \log p(x)$  für die gemischte Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p$ , gegeben durch  $p(x) = wp_1(x) + (1-w)p_2(x)$ , die Ungleichung

$$H(p) \geq wH(p_1) + (1-w)H(p_2) \quad (1)$$

erfüllt. Sie dürfen verwenden, dass eine Funktion mit nicht positiver zweiter Ableitung konkav ist.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass das Gleichheitszeichen in der Ungleichung (1) nur gilt, wenn  $p_1 = p_2$  oder  $w \in \{0, 1\}$ .

c) (2 Punkt) Wir betrachten nun einen Bit, d. h.  $X = \{0, 1\}$ . Stellen Sie  $H$  als Funktion der Wahrscheinlichkeit  $p(0)$  grafisch dar. Veranschaulichen Sie nun die Konkavität der Shannon-Entropie, indem Sie die Werte für  $H(wp_1 + (1-w)p_2)$  und  $wH(p_1) + (1-w)H(p_2)$  für ein  $w \in (0, 1)$  und zwei Wahrscheinlichkeiten  $0 < p_1(0) < p_2(0) < 1$  einzeichnen.

#### Aufgabe 3 : Shannon-Entropie für zwei Ereignisse

Sei  $p$  die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Botschaft der Länge 2 wobei das erste Zeichen,  $x$ , aus dem Alphabet  $X$  und das zweite,  $y$ , aus dem Alphabet  $Y$  stammt. Die Zeichenkombination  $x, y$  tritt mit der Wahrscheinlichkeit  $p(x, y)$  auf. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $p_x$  und  $p_y$  für die einzelnen Symbole sind dann gegeben durch  $p_x(x) = \sum_{y \in Y} p(x, y)$  und  $p_y(y) = \sum_{x \in X} p(x, y)$ .

a) Beweisen Sie  $H(p) \geq H(p_x), H(p_y)$ .

b) Wann gilt  $H(p) = H(p_x)$ ?

#### Aufgabe 4 : Subadditivität der Shannon-Entropie

Es sollen folgende Behauptungen bewiesen werden. Seien  $p$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $p_x$  und  $p_y$  wie in Aufgabe 3, dann gilt

$$H(p) \leq H(p_x) + H(p_y)$$

und

$$H(p) = H(p_x) + H(p_y) \Leftrightarrow p(x, y) = p_x(x)p_y(y) \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

Die zweite Aussage bedeutet, dass die Shannon-Entropie  $H$  nur im Fall nicht korrelierter Ereignisse additiv ist.

a) Betrachten Sie zunächst den Spezialfall  $X = \{0, 1\}$  mit  $w = p_x(0)$ . Zeigen Sie, dass die Behauptungen dann identisch sind zu den Aussagen aus Aufgabe 2 a) und b). Nutzen Sie dabei die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $p(y|x=0) = p(x=0, y)/w$  und  $p(y|x=1) = p(x=1, y)/(1 - w)$ .

b) Verallgemeinern Sie nun auf ein beliebiges Alphabet  $X$ .