Fachbereich Physik

Prof. Dr. Cord Müller
Dr. Stefan Gerlach (Übungen)

Universität Konstanz

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2013/14

Konstanz, den 18.12.2013

# 9.Übungsblatt

(Abgabe am 8.1.2014, Übung am 10.1.2014)

## Aufgabe 17: Ladung im elektromagnetischen Feld (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Lagrangefunktion eines Teilchens der Ruhemasse $m$ und Ladung $e$ im elektromagnetischen Feld hergeleitet:

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - e\Phi(\mathbf{r}, t) + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

a) (1 Punkt) Wie lautet der kanonisch konjugierte Impuls?

b) (2 Punkte) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Teilchens?

c) (1 Punkt) Betrachten Sie zeitunabhängige Felder $\Phi = \Phi(\mathbf{r}), \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$. Finden Sie die dadurch existierende Erhaltungsgröße.

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Bahn $y(x)$ eines relativistischen Teilchens (Ruhemasse $m$, Ladung $e$) in einem homogenen elektrischen Feld $E$ entlang $y$, wenn es sich anfänglich mit einem Impuls $p_0 \ll mc$ in $x$-Richtung bewegt. Diskutieren Sie die Bewegung im nichtrelativistischen und im ultrarelativistischen Grenzfall, d.h. für kurze und lange Zeiten.

   *Hinweise*: Zeigen Sie $\mathbf{v} = c^2\mathbf{p}/\mathcal{E}$ mit der Energie $\mathcal{E} = \sqrt{(mc^2)^2 + (cp)^2}$. Lösen Sie die Bewegungsgleichung um $x(t)$ und $y(t)$ zu erhalten ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{asinh}(\alpha t) = \alpha/\sqrt{1+\alpha^2t^2}$) und setzen Sie ineinander ein.

e) (2 Punkte) Betrachten Sie ein Teilchen in den homogenen Feldern $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, also $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

   i) Zeigen Sie, dass $\Phi = -Ey$ und $\mathbf{A} = -By\mathbf{e}_x$ zu den gewünschten Feldern führen. Wie lautet also die Lagrangefunktion?

   ii) Welche zyklischen Variablen liegen vor und welche Erhaltungsgrößen gibt es damit?

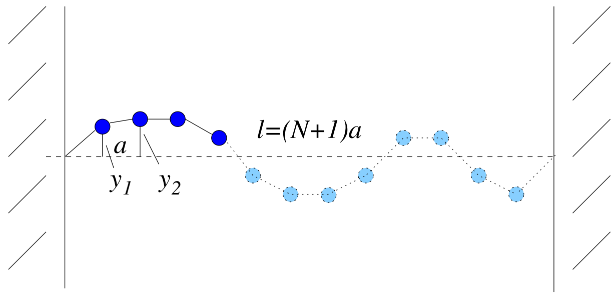
   iii) Bestimmen Sie aus der Translation von $y$ mit dem Noethertheorem eine weitere Erhaltungsgröße.

f) (2 Punkte) Lösen Sie die Bewegungsgleichung eines Teilchens mit $p_0 \ll mc$ in der $x$-$y$-Ebene für homogene Felder $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_z$. Welche Bahnform ergibt sich? Diskutieren Sie auch hier die Bewegung im nichtrelativistischen und im ultrarelativistischen Grenzfall.

   *Hinweise*: Die Bewegung in $z$-Richtung ist unabhängig von der Bewegung in der $x$-$y$-Ebene. Zeigen Sie $\dot{p} = -ieBp/\mathcal{E}$ mit $p = p_x + ip_y = p_t e^{-i\phi}$ und konstantem $p_t$ und finden Sie damit $x(\phi), y(\phi), z(\phi)$.

**Aufgabe 18: Die schwingende Saite** **(10 Punkte)**

Betrachten Sie ein einfaches Modell einer transversal schwingenden Saite bestehend aus $N$ Massen $m$, die mit Federn der Federkonstanten $d = \sigma/a$ verbunden sind ($\sigma$ ist die Federkraft). Die Saite sei an den Enden fest und die Massen haben feste $x$ Positionen ($x_j = ja$) mit einem Abstand $a$ (siehe Skizze). Gesucht sind die Lösungen $y_j$ der Auslenkungen der Massen.




a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion für kleine Auslenkungen $y_j$ gegeben ist durch $L = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{y}} \cdot \mathrm{M}\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \cdot \mathrm{K}\mathbf{y})$. Bestimmen Sie damit die Bewegungsgleichung für die Saite.

b) (2 Punkte) Lösen Sie die Bewegungsgleichung durch den Ansatz ebener Wellen

$$y_j(t) = Ae^{i(kx_j - \omega t)} + Be^{-i(kx_j - \omega t)}$$

und ermitteln Sie dadurch die Dispersionsrelation $\omega(k)$ und skizzieren Sie diese.

c) (2 Punkte) Welche diskreten Werte $k_n$ sind möglich, wenn die Randbedingungen ($y_0 = y_{N+1} = 0$) berücksichtigt werden? Welche diskreten Kreisfrequenzen $\omega_n = \omega(k_n)$ ergeben sich damit? Skizzieren Sie $\omega_n$ und diskutieren Sie Phasen- und Gruppengeschwindigkeit für die Grenzfälle $n \ll N$ und $n = N + 1$.

d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Eigenmoden $\hat{y}_j^{(n)} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin(k_n x_j)$ die Eigenwertgleichung

$$(\mathrm{K} - \omega_n^2 \mathrm{M})\hat{\mathbf{y}}^{(n)} = 0$$

erfüllen. Wie lauten damit die Normalkoordinaten $Q_n(t)$?

e) (2 Punkte) Wir gehen jetzt über zur Kontinuumsbeschreibung durch unendliche kleine, aber unendlich viele Massen ($m \to 0, a \to 0, N \to \infty$) wobei die Gesamtlänge $l = (N+1)a$ und die Massendichte $\mu = m/a$ festgehalten werden. Die Auslenkung der Saite wird dann durch $y(x,t)$ beschrieben.

i) Zeigen Sie, dass sich die Lagrangefunktion als Integral $L = \int_0^l \mathcal{L}\,\mathrm{d}x$ der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}(\partial_t y(x,t))^2 - \frac{\sigma}{2}(\partial_x y(x,t))^2$$

schreiben lässt.
*Hinweis*: Grenzübergang $\sum_j af_j \to \int f(x)\mathrm{d}x$ und $(f_{j+1} - f_j)/a \to \partial_x f(x,t)$.

ii) Die Wirkung $S = \int \mathrm{d}t \int \mathrm{d}x \mathcal{L}$ wird stationär, wenn die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t y)} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x y)} - \partial_y \mathcal{L} = 0$$

erfüllt ist. Welche Bewegungsgleichung ergibt sich?

iii) Wie lauten die normierten Eigenmoden der Saitenschwingung? Zeigen Sie die Orthonormalität dieser Basis.

**Das IK3 Team wünscht gesegnete Weihnachten**
**und einen guten Start ins Jahr 2014!**