Fachbereich Physik

Prof. Dr. Cord Müller
Dr. Stefan Gerlach (Übungen)

Universität Konstanz

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2013/14

Konstanz, den 11.12.2013

8.Übungsblatt

(Abgabe am 18.12.2013, Übung am 20.12.2013)

Aufgabe 15: Geodäten (11+3 Punkte)

Zur Erinnerung: Das Bogenlängenfunktional

$$l[q] = \int_{P_1}^{P_2} \mathrm{d}l = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, f(q, \dot{q}, t)$$

wird stationär bei Bahnen $q(t)$, die die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen, d.h.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial f}{\partial q}.$$

a) (2 Punkte) In der Ebene ist $\mathrm{d}l = \mathrm{d}t\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ durch einen konstanten Tangentialvektor $\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}$ gelöst werden. Welche Art von Kurve wird dadurch beschrieben?

b) (1 Punkt) Wählen Sie alternativ die Parametrisierung $\mathbf{x} = (x, y(x))$ und stellen Sie die Bewegungsgleichung für $y(x)$ auf. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Resultat von a).

c) (2 Punkte) Auf einem Zylinder drücken wir $\mathbf{x} = \mathbf{x}(r, \phi, z)$ in Zylinderkoordinaten aus und wählen o.B.d.A $r = 1$. Durch die Parametrisierung $z = z(\phi)$ erhalten wir $\mathrm{d}l = \mathrm{d}\phi\, g(z')$ mit $z' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\phi}$.

Bestimmen Sie die kürzeste Bahnkurve $z_0(\phi)$ zwischen den Punkten $P_1 = (0, 0)$ und $P_2 = (\phi_2, z_2)$. Welche Bahn ist dies, wenn man den Zylinder auf eine ebene Fläche abrollt?

Welcher Spezialfall lässt sich mit der gewählten Parametrisierung nicht finden? Wie kann man stattdessen verfahren?

d) (3 Punkte) Auf der Kugel (mit Radius $r = 1$) wählen wir Kugelkoordinaten (θ, ϕ) und die Parametrisierung $\theta(\phi)$. Zeigen Sie zunächst, dass $\mathrm{d}l = \mathrm{d}\phi\sqrt{\sin^2(\theta) + \theta'^2}$ und

$$\theta'' = (\sin^2\theta + 2\theta'^2)\cot\theta. \tag{1}$$

Folgern Sie sodann, dass $(\cot\theta)'' + \cot\theta = 0$ und daher die Lösung durch $\cot\theta = \alpha\sin\phi + \beta\cos\phi$ gegeben ist. Welche Bahnkurve wird hierdurch beschrieben?

Hinweis: Welche Bedingung erfüllen die Schnittpunkte der Einheitskugel mit einer Ebene durch den Ursprung, die durch $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = 0$ beschrieben wird?

e) (3 Zusatzpunkte) Im allgemeinen Fall ist das Linienelement gegeben durch $\mathrm{d}l = \mathrm{d}t\sqrt{F(q, \dot{q})}$ mit $F(q, \dot{q}) = g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$ (Einstein Summenkonvention) wobei $g_{ij}(q)$ der symmetrische metrische Tensor und $q = (q^1, ..., q^f)$ die lokalen Koordinaten sind.

Zeigen Sie, dass die Bahnkurven, die die Bahnlänge extremalisieren, die geodätische Differenzialgleichung

$$\ddot{q}^m + \Gamma^m_{kl}\dot{q}^k\dot{q}^l = 0$$

mit dem *Christoffelsymbol* $\Gamma^m_{kl} = \frac{1}{2}g^{mn}(\partial_k g_{ln} + \partial_l g_{kn} - \partial_n g_{kl})$ erfüllen. Hier ist $g^{mn}g_{np} = \delta^m_p$.

Hinweise: Zeigen Sie die folgenden Teilschritte:

i) $f = \sqrt{F}$ erfüllt die Euler-Lagrange-Gleichung, wenn F die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt und zusätzlich $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 0$ gilt.

ii) Für $F = g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$ mit symmetrischem g_{ij} ist $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \dot{q}^i(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i})$.

iii) Die Euler-Lagrange-Gleichung für F ergibt die geodätische Differenzialgleichung.

f) (3 Punkte) Bei holonom-skleronomen Zwangsbedingungen drücken wir die Koordinaten eines mechanischen Systems $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, ..., q^f)$ durch generalisierte Koordinaten aus. Zeigen Sie, dass sich die kinetische Energie schreiben lässt als

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{r}}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{f} m_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$$

mit einem symmetrischen Massetensor $m_{ij}(q)$. Zeigen Sie weiter, dass sich die Euler-Lagrange-Gleichung für $L(q,\dot{q}) = T(q,\dot{q}) - U(q)$ in der Form einer geodätischen Differenzialgleichung schreiben lässt:

$$\ddot{q}^m + \Gamma^m_{kl}\dot{q}^k\dot{q}^l = \Phi^m.$$

Was sind hier Γ^m_{kl} und Φ^m? Welche Bahnkurve beschreibt also ein System im kräftefreien Fall? Zeigen Sie, dass die kräftefreie Bewegung eines Teilchen auf der Einheitskugel Gleichung (1) genügt.

Ausblick: In der Allgemeinen Relativitätstheorie nach Einstein bewegen sich alle Massen auf den Geodäten eines Raumes, der durch die Anwesenheit der anderen Massen gekrümmt wird. Gravitation ist Geometrie!

Aufgabe 16: Variation mit Nebenbedingungen - Die Kettenlinie (9 Punkte)

Lagrange Multiplikatoren: Es sollen die Extrema einer Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unter den Nebenbedingungen $f_1(\mathbf{x}) = 0, f_2(\mathbf{x}) = 0, ..., f_s(\mathbf{x}) = 0$ gefunden werden. Im Allgemeinen lassen sich die Nebenbedingungen durch die Einführung eines Satzes sog. *Lagrangescher Multiplikatoren* $\lambda = \{\lambda_\alpha | \alpha = 1, ..., s\}$ erfüllen.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie: die Funktion

$$\tilde{h}(\mathbf{x},\lambda) = h(\mathbf{x}) - \sum_{\alpha=1}^{s}\lambda_\alpha f_\alpha(\mathbf{x})$$

ist stationär ($\delta\tilde{h} = \nabla_{\mathbf{x}}\tilde{h}\cdot\delta\mathbf{x} + \nabla_\lambda\tilde{h}\cdot\delta\lambda = 0$) genau dann, wenn die Funktion $h(\mathbf{x})$ bzgl. der erlaubten Variationen nach $\mathbf{x}$ stationär ist.

b) (3 Punkte) Finden Sie als einfaches Beispiel die Extremwerte auf einer geneigten Ebene $h(x,y) = x - y$ mit (x,y) auf dem Einheitskreis. Wie lautet also die Nebenbedingung $f(x,y)$ und damit $\tilde{h}(x,y,\lambda)$? Skizzieren Sie die Lage der Extrema von h mit der Nebenbedingung.

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Kurve, die eine bewegliche Kette der Länge l im homogenen Schwerefeld beschreibt, wenn diese zwischen zwei Pfosten gleicher Höhe im Abstand a gespannt wird.

Zeigen Sie dazu zweckmäßigerweise, dass

i)
$$\tilde{u}[y,\lambda] = \int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x\,(y-\lambda)\sqrt{1+y'^2} = \int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x\, g(y,y',\lambda)$$

ein geeignetes Zielfunktional ist (welches übrigens unabhängig von der Massendichte der Kette und der Stärke der Gravitation ist),

ii) die Euler-Lagrange-Gleichung für g äquivalent zur Existenz der Erhaltungsgröße

$$C = g - y'\frac{\partial g}{\partial y'}$$

ist, wenn $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ (*Beltrami Identität*),

iii) die optimale Kurve gegeben ist durch $y_0(x) = C\cosh(x/C) + \lambda$.