Fachbereich Physik

Prof. Dr. Cord Müller
Dr. Stefan Gerlach (Übungen)

Universität Konstanz

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2013/14

Konstanz, den 4.12.2013

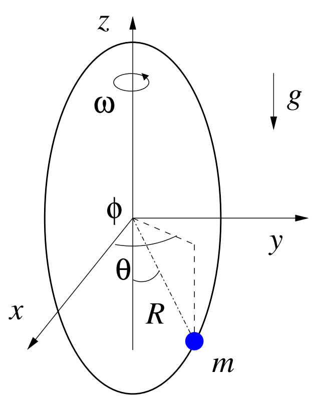
7.Übungsblatt

(Abgabe am 11.12.2013, Übung am 13.12.2013)

Aufgabe 13: Spontane Symmetriebrechung - Die Perle auf dem Ring (10 Punkte)

Betrachten Sie erneut die Perle auf dem rotierenden Ring (siehe Aufgabe 11c)). Die Lagrangefunktion ergab sich zu

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta. \tag{1}$$



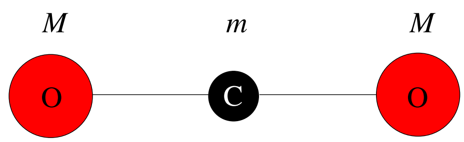
a) (2 Punkte) Wie lautet das effektive Potential $U_{\text{eff}}(\theta)$? Bestimmen Sie damit die Gleichgewichtslagen.

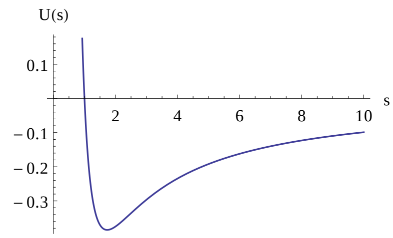
b) (4 Punkte) Diskutieren Sie die Stabilität der Gleichgewichtslagen und finden Sie die kritische Kreisfrequenz ω_c, bei der eine spontane Symmetriebrechung stattfindet. Skizzieren Sie das effektive Potential $U_{\text{eff}}(\theta)$ für ω ober- und unterhalb von ω_c.

c) (4 Punkte) Betrachten Sie kleine Auslenkungen um die stabilen Gleichgewichtslagen und bestimmen Sie jeweils die effektive Kreisfrequenz der Schwingung um den Gleichgewichtspunkt. Skizzieren Sie die effektive Kreisfrequenz in Abhängigkeit von ω und diskutieren Sie die drei Grenzfälle $\omega \to 0, \omega \to \omega_c, \omega \to \infty$.

Aufgabe 14: Lineare Schwingung des CO_2 Moleküls **(10 Punkte)**

Wir betrachten die Schwingung eines dreiatomigen Moleküls ($m_1 = m_3 = M, m_2 = m$) entlang der Verbindungsachse. Das Wechselwirkungspotential zweier benachbarter Atome, $U(s)$, hat ein Minimum im Abstand s_0, so dass $U''(s_0) = k > 0$ (siehe Skizze). Die Wechselwirkung zwischen den Endatomen 1 und 3 kann vernachlässigt werden.





a) (1 Punkt) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Moleküls für kleine Auslenkungen $y_i = x_i - x_{i0}$ aus der Ruhelage auf.

b) (1 Punkt) Schreiben Sie die Lagrangefunktion als

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{y}} \cdot \mathrm{M}\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \cdot \mathrm{K}\mathbf{y}) \tag{2}$$

und bestimmen Sie die (symmetrische) Masse- und Kraftmatrix M bzw K.

c) (2 Punkte) Stellen Sie die Säkulargleichung

$$\det(\mathrm{K} - \omega^2 \mathrm{M}) = 0$$

auf und berechnen Sie die Eigenfrequenzen ω_i.

d) (3 Punkte) Welche Eigenmode $\mathbf{y}^{(1)}$ gehört zur kleinsten Eigenfrequenz? Bestimmen Sie außerdem die anderen Eigenmoden $\mathbf{y}^{(2)}$ und $\mathbf{y}^{(3)}$ und veranschaulichen Sie die Schwingungsformen.

e) (1 Punkt) Bestimmen Sie das Verhältnis der beiden Eigenfrequenzen ω_2, ω_3 für das CO_2-Molekül.

f) (2 Punkte) Berechnen Sie die normierten Eigenmoden $\hat{\mathbf{y}}^{(i)}$, so dass

$$\hat{\mathbf{y}}^{(i)} \cdot \mathrm{M}\hat{\mathbf{y}}^{(\mathrm{j})} = \delta_{\mathrm{ij}}.$$

Wie lauten damit die Normalkoordinaten

$$Q_i = \hat{\mathbf{y}}^{(i)} \cdot \mathrm{M}\mathbf{y}$$

abhängig von y_i?

Schreiben Sie (2) in Normalform. Welche Bewegungsform findet man für $Q_1(t)$? Interpretieren Sie den zugehörigen generalisierten Impuls $\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_1}$.