Fachbereich Physik

Prof. Dr. Cord Müller
Dr. Stefan Gerlach (Übungen)

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2013/14

Konstanz, den 20.11.2013

5.Übungsblatt

(Abgabe am 27.11.2013, Übung am 29.11.2013)

Aufgabe 9: Lorentzinvariante Schreibweise der Elektrodynamik (14 Punkte)

Aus dem kovarianten Viererpotential $A_\mu = (\Phi/c, -\mathbf{A})$ gewinnt man den elektromagnetischen Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

sowie den dualen Tensor

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ -B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ -B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (3 Punkte) Drücken Sie die folgenden Feldinvarianten (Lorentzskalare) durch **E** und **B** aus.

i) $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$

ii) $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$

iii) $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$

b) (6 Punkte) In Abwesenheit von Ladungen lauten die Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.$$

i) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das Vektorpotential $A_\mu(x)$ auf.
Hinweis: Verwenden Sie den d'Alembert-Operator $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$.

ii) Wie vereinfacht sich die Bewegungsgleichung bei *Lorenz-Eichung* $\partial_\mu A^\mu = 0$?

iii) Lösen sie die Bewegungsgleichung aus ii) mit dem Ansatz $A^\mu(x) = a^\mu e^{ik\cdot x}$. Welche Bedingungen erfüllen k und a?

iv) Drücken Sie $\mathbf{E}(x)$ und $\mathbf{B}(x)$ durch **a** und **k** aus und berechnen Sie $\mathbf{E}\cdot\mathbf{k}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{k}$, $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ und $B^2 - E^2/c^2$ (vgl. b)). Gibt es ein Inertialsystem, in dem die ebene elektromagnetische Welle ein rein elektrisches Feld ($\mathbf{B} = 0$) oder ein rein magnetisches Feld ($\mathbf{E} = 0$) ist?

c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass F invariant ist unter *Eichtransformationen* $A_\mu \mapsto A_\mu - \partial_\mu f$ mit beliebigem $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Welcher Gleichung muss die Erzeugendenfunktion f genügen, damit die Lorenzeichung erfüllt bleibt?

d) (1 Punkt) In Anwesenheit von Ladungen lauten die inhomogenen Maxwellgleichungen $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ mit der (lorentzinvarianten) Permeabilität des Vakuums μ_0 und der Viererstromdichte $j^\nu = (c\rho, \mathbf{j})$.

Zeigen Sie, dass j^ν divergenzfrei ist, d.h. $\partial_\nu j^\nu = 0$ und dass damit die Kontinuitätsgleichung für die Ladung folgt:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

e) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Viererkraft $F^\mu = q u_\nu F^{\nu\mu}$ senkrecht auf u_μ steht ($u \cdot F = 0$). Um welche Kraft handelt es sich und welche Bedeutung hat der Lorentzskalar q?

Aufgabe 10: Lorentztransformation der Felder (6 Punkte)

Die elektromagnetischen Feldstärken transformieren sich bei einem Wechsel des Inertialsystems gemäß

$$F'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} = L^\mu{}_\alpha F^{\alpha\beta} (L^t)_\beta{}^\nu = (LFL^t)^{\mu\nu}.$$

a) (3 Punkte) Betrachten Sie einen Lorentzboost in ein Inertialsystem S' mit $\mathbf{v} \parallel \mathbf{e}_x$, d.h.

$$L = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } l = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Komponenten F_{01} und F_{23} invariant sind. Was folgt damit für E'_x und B'_x?

Hinweise: Schreiben Sie $F = \begin{pmatrix} f & g \\ -g^t & h \end{pmatrix}$ mit den 2x2 Matrizen f, g, h. Verwenden Sie $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\Gamma & B\Delta \\ C\Gamma & D\Delta \end{pmatrix}$ für beliebige 2x2 Matrizen $A, B, C, D, \Gamma, \Delta$.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass aus $g' = lg$ (siehe a)) folgt:

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z), B'_y = \gamma(B_y + \frac{vE_z}{c^2}),$$
$$E'_z = \gamma(E_z + vB_y), B'_z = \gamma(B_z - \frac{vE_y}{c^2}).$$

c) (2 Punkte) Im Ursprung von S' ruhe eine Punktladung q. Zeigen Sie, dass zwischen den Feldern $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ in S die Beziehung

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

gilt.

Im Grenzfall $v \ll c$ ist dabei

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

das Coulomb-Feld der Punktladung q. Welches bekannte Gesetz ergibt sich damit für das Magnetfeld $\mathbf{B}$?