Fachbereich Physik

Prof. Dr. Cord Müller
Dr. Stefan Gerlach (Übungen)

Universität Konstanz

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2013/14

Konstanz, den 6.11.2013

3.Übungsblatt

(Abgabe am 13.11.2013, Übung am 15.11.2013)

Aufgabe 5: Relativistischer Dopplereffekt **(10 Punkte)**

Im Inertialsystem S werde eine ebene elektromagnetische Welle mit dem Wellenvektor $\mathbf{k}$ und der Frequenz $\omega = c|\mathbf{k}|$ beobachtet.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie:

   i) $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ ist ein Nullvektor, d.h.

$$k^2 = k^\mu g_{\mu\nu} k^\nu = 0.$$

   ii) Die Phase $\phi = k \cdot x = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ ist Lorentzinvariant, wenn der Wellenvektor in einem anderen Inertialsystem $k'^\mu = L^\mu{}_\nu k^\nu$ lautet.

b) (2 Punkte) Betrachten Sie konkret das Inertialsystem S', dass sich bezüglich S mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt und wählen Sie die von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{k}$ aufgespannte Ebene als x-y-Ebene, d.h. in S ist

$$\mathbf{k} = |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $k'^\mu = (\omega'/c, \mathbf{k}')$ als Funktion von ω, θ und $\beta = v/c$. Zeigen Sie insbesondere, dass

$$\omega' = \omega\gamma(1 - \beta\cos\theta).$$

c) (3 Punkte) Longitudinaler Dopplereffekt: Bestimmen Sie die Beziehung zwischen ω und ω' für die Fälle, dass $\mathbf{k}$ und $\mathbf{v}$ parallel bzw. antiparallel sind. Was findet man für $v \ll c$?

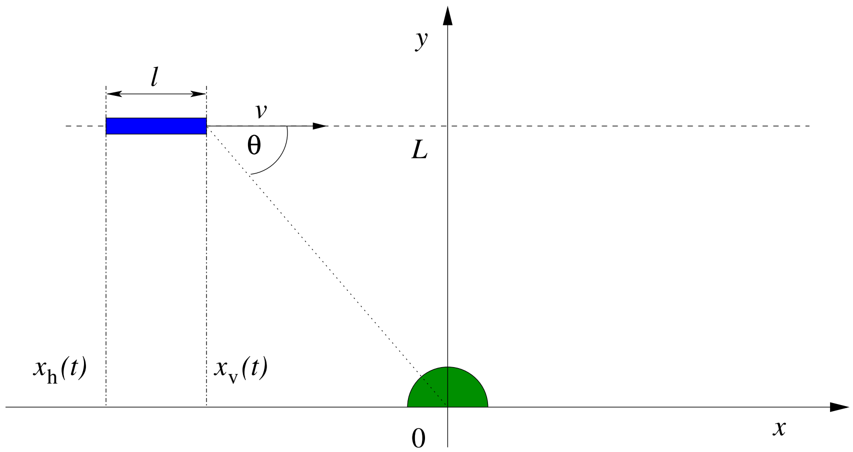
Wie schnell muss man ungefähr auf eine rote Ampel zufahren, damit sie grün erscheint?

d) (2 Punkte) Transversaler Dopplereffekt: Es sei $\mathbf{k} \perp \mathbf{v}$. Wie lautet dann die Beziehung zwischen ω und ω'? Was findet man für $v \ll c$?

e) (1 Punkt) Was ist der grundlegende Unterschied zwischen dem betrachteten relativistischen Dopplereffekt und dem klassischen Dopplereffekt der Schallausbreitung?

Aufgabe 6: Fotografie eines schnell bewegten Maßstabes **(10 Punkte)**

Im Inertialsystem S beobachtet man einen Maßstab mit den Endpunkten $\mathbf{x}_{\mathrm{v(orn)}}, \mathbf{x}_{\mathrm{h(inten)}}$ und der Länge $l = |\mathbf{x}_{\mathrm{v}} - \mathbf{x}_{\mathrm{h}}|$, der mit dem Abstand L zum Ursprung mit der Geschwindigkeit v vorüber fliegt (siehe Skizze). Es gilt also $x_{\mathrm{v}}(t) = vt, x_{\mathrm{h}}(t) = vt - l$.



Im Ursprung 0 sitzt eine Kamera, die ständig Bilder des Maßstabes aufnimmt. Man bestimme die scheinbare Länge $\tilde{l}$ des Maßstabes als Funktion des Aufnahmezeitpunkts t_0. Gehen Sie wie folgt vor:

a) (3 Punkte) $D = (ct_0, 0, 0, 0); E_{\mathrm{v}} = (ct_{\mathrm{v}}, x_{\mathrm{v}}(t_{\mathrm{v}}), L, 0); E_{\mathrm{h}} = (ct_{\mathrm{h}}, x_{\mathrm{h}}(t_{\mathrm{h}}), L, 0)$ sind die drei Ereignisse der Detektion, bzw. der Emission des Lichtsignals am vorderen und hinteren Ende des Stabes. Skizzieren Sie $D, E_{\mathrm{v}}, E_{\mathrm{h}}$ im Minkowskidiagramm (ct_0, x) im Grenzfall $|vt_0| \gg L, l$, und zwar für $t_0 < 0$ und $t_0 > 0$.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Koordinaten von $E_{\mathrm{v}}, E_{\mathrm{h}}$ als Funktion von $\beta, t_0, t_L = L/c$ aus der Bedingung, dass diese Ereignisse auf dem Vergangenheitslichtkegel von D liegen.

Hinweis: Es ergibt sich mit $t_l = l/c$

$$t_{\mathrm{v}} = \gamma^2 t_0 - \gamma\sqrt{t_L^2 + \beta^2\gamma^2 t_0^2}, \quad t_{\mathrm{h}} = \gamma^2(t_0 - \beta t_l) - \gamma\sqrt{t_L^2 + \gamma^2(\beta t_0 - t_l)^2}.$$

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie $\tilde{l} = x_{\mathrm{v}}(t_{\mathrm{v}}) - x_{\mathrm{h}}(t_{\mathrm{h}})$ und skizzieren Sie $\tilde{l}/l$ als Funktion von $\tau_0 = t_0/t_l$ für $1 > \beta > 0$ und $L = l$. Welche scheinbare Länge ergibt sich für $t_0 \to \pm\infty$?

d) (2 Punkte) An welcher Position x_{c} wechselt die Ansicht des Maßstabes für die Kamera von der Vorder- auf die Rückseite?

Hinweis: x_{c} ist bestimmt durch denjenigen Abstrahlwinkel θ, für den im mitbewegten Bezugssystem $\theta' = \pi/2$ ist. Man erinnere sich an Aufgabe 5b).

Zum Weiterlesen: Auf der Webseite www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de werden verschiedene Effekte der Relativitätstheorie, u.a. auch der bewegte Maßstab, diskutiert.