Fachbereich Physik

Prof. Dr. Cord Müller
Dr. Stefan Gerlach (Übungen)

Universität Konstanz

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2013/14

Konstanz, den 30.10.2013

2.Übungsblatt

(Abgabe am 6.11.2013, Übung am 8.11.2013)

Aufgabe 3: Lorentztransformation **(11 Punkte)**

In der Vorlesung wurden der metrische Tensor g über $x \cdot y = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ (mit Summenkonvention) und die Lorentztransformation L über $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$ eingeführt. Es wurde gezeigt, dass $L^t g L = g$, d.h. in Komponenten

$$(L^t)_\nu{}^\mu g_{\mu\rho} L^\rho{}_\sigma = L^\mu{}_\nu g_{\mu\rho} L^\rho{}_\sigma = g_{\nu\sigma} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) (3 Punkte) Zeigen Sie folgende Eigenschaften des metrischen Tensors:

i) $g^t = g$, d.h. $(g^t)_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$.

ii) $g = g^{-1}$ bzw. $g^2 = \mathbb{1}$, d.h. $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho = \begin{cases} 1, \mu = \rho \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$.

iii) $\det g = -1$.

b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $\det L = \pm 1$.

Welches Vorzeichen erhält man für die folgenden speziellen Transformationen? Um welche Transformationen handelt es sich?

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, L_4 = -L_1.$$

Zeigen Sie allgemein, dass $|L_0{}^0|^2 \geq 1$.

Hinweis: Betrachten Sie g_{00} in (1).

Im Folgenden beschränken wir uns auf die *eigentlichen* ($\det L = +1$) und *orthochronen* ($L_0{}^0 \geq 1$) Lorentztransformationen.

c) (2 Punkte) Invertierung der Lorentztransformation: Zeigen Sie mit Hilfe von (1), dass $L^{-1} = g^{-1} L^t g$, d.h. in Komponenten $(L^{-1})^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho} (L^t)_\rho{}^\sigma g_{\sigma\nu}$.

Hinweis: $L^{-1} L = \mathbb{1}$.

Betrachten Sie einen Lorentzboost im Raum (x^0, x^1), $L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} L^0{}_0 & L^0{}_1 \\ L^1{}_0 & L^1{}_1 \end{pmatrix}$, und stellen Sie $(L^{-1})^\mu{}_\nu$ auf.

d) (2 Punkte) Leiten Sie ausgehend von $L^\mu{}_\nu = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\zeta & -\sinh\zeta \\ -\sinh\zeta & \cosh\zeta \end{pmatrix}$, $\beta = \tanh\zeta = v/c$, die Standardform der Lorentztransformation her:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Was ergibt sich für $v \ll c$? Wie lautet die inverse Transformation (siehe c))?

Aufgabe 4: Addition von Geschwindigkeiten **(9 Punkte)**

Die Lorentztransformation vom Bezugssystem S in ein mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegtes Bezugssystem S' lautet

$$x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu, \quad L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (4 Punkte) Addition von kollinearen Geschwindigkeiten: Das System S'' bewege sich seinerseits mit der Geschwindigkeit v' (parallel zur x-Richtung) bzgl. S'. Zeigen Sie, dass sich die Rapiditäten addieren, $\zeta'' = \zeta + \zeta'$, und die Geschwindigkeit v'' von S'' in S gegeben ist durch

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + vv'/c^2}. \tag{2}$$

Hinweis: Nutzen Sie die Gruppeneigenschaft der Lorentztransformation, $L'' = L'L$.

Diskutieren Sie das Ergebnis (2) für die Grenzfälle $v = c$ oder $v' = c$, sowie $v, v' \ll c$.

b) (5 Punkte) Die Geschwindigkeit eines Objektes in S' sei $\mathbf{u}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Wie lautet seine Geschwindigkeit $\mathbf{u} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in S?

Überprüfen Sie das Ergebnis für die Grenzfälle $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ und $u, v \ll c$.

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabe 3d).