Fachbereich Physik

Prof. Dr. Cord Müller
Dr. Stefan Gerlach (Übungen)

Universität Konstanz

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2013/14

Konstanz, den 5.2.2014

14.Übungsblatt

(Abgabe am 12.2.2014, Übung am 14.2.2014)

Aufgabe 26: Kanonische Transformationen (10+5 Punkte)

Wir betrachten den eindimensionalen harmonischen Oszillator,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2.$$

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ so, dass $(q, p) \leftrightarrow (Q, P)$ mit

$$q = \alpha P^\beta \sin Q, \quad p = \gamma P^\delta \cos Q$$

eine kanonische Transformation ist. In welcher Relation stehen α und γ? Welche Dimension hat P?

b) (2 Punkte) Benutzen Sie $p = p(q, Q) = \frac{\partial F}{\partial q}$ und $P = P(q, Q) = -\frac{\partial F}{\partial Q}$ um die Erzeugende $F(q, Q)$ dieser Transformation zu finden.

c) (5 Punkte) Benutzen Sie die so gewonnene Transformation, um die Hamiltonfunktion $H(q(Q, P), p(Q, P)) = \tilde{H}(Q, P)$ in eine Form zu bringen, in der Q zyklisch ist (Winkel-Wirkungs-Variablen).

Wie lauten die Bewegungsgleichungen in den neuen Variablen? Skizzieren Sie das Phasenraumportrait $P(Q)$. Wie lautet die Lösung $(q(t), p(t))$ der Bewegungsgleichung für $q(0) = 0$ bei geeignet gewähltem Zeitnullpunkt und $p_0 = p(0)$ beliebig?

d) (5 Zusatzpunkte) Betrachten Sie die komplexe Transformation

$$Q = \frac{m\omega q + ip}{\sqrt{2m\omega}}, \quad P = iQ^* = \frac{p + im\omega q}{\sqrt{2m\omega}}.$$

Wie lauten also $q(Q, P)$ und $p(Q, P)$? Zeigen Sie, dass diese Transformation kanonisch ist und wenden Sie diese auf den eindimensionalen harmonischen Oszillator an. Zeigen Sie, dass sich auch hier die bekannten Lösungen $(q(t), p(t))$ ergeben.

Ausblick: Die kanonische Transformation in d) spielt eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik. Mit der zeitabhängigen Transformation

$$Q = \frac{m\omega q + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad P = iQ^* = \frac{p + im\omega q}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}$$

kann dabei in das sog. Wechselwirkungsbild gewechselt werden, in dem die freie Zeitentwicklung komplett verschwindet.