Fachbereich Physik

Prof. Dr. Cord Müller
Dr. Stefan Gerlach (Übungen)

Universität Konstanz

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2013/14

Konstanz, den 15.1.2014

11.Übungsblatt

(Abgabe am 22.1.2014, Übung am 24.1.2014)

Aufgabe 20: Legendre-Transformation (12 Punkte)

Sei $f : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikt konvex, d.h. $f''(x) > 0\ \forall x \in I$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x,p) = xp - f(x)$ für ein festes p entweder kein oder ein eindeutiges Maximum $x(p) = (f')^{-1}(p)$ hat.

b) (4 Punkte) Die Legendre-Transformation $f \to f^*$ wird definiert durch

$$f^*(p) = \sup_x (px - f(x)) = px(p) - f(x(p)).$$

Zeigen Sie

i)
$$f(x) = g(\alpha x) \Rightarrow f^*(p) = g^*(p/\alpha) \quad (\alpha \neq 0),$$

ii)
$$f(x) = \frac{1}{r}x^r \Rightarrow f^*(p) = \frac{1}{s}p^s \text{ mit } \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 \quad (r, s > 1),$$

iii) $f(x) + f^*(p) \geq xp$ (Young'sche Ungleichung). Was folgt mit ii)?

c) (1 Punkte) Bestimmen Sie $f^*(p)$ für

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$$

und skizzieren Sie beide Funktionen.

d) (2 Punkte) Zeigen Sie

$$(f^*)^* = f,$$

d.h. die Legendre-Transformation ist eine *Involution*.

Hinweis: $(f^*)''(p) > 0$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen angewendet auf f'.

e) (3 Punkte) Berechnen Sie die Legendretransformierte $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = L^*(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ der Lagrangefunktion eines relativistischen Teilchens (Ladung e, Masse m)

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - e\Phi(\mathbf{r}, t) + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

Verständnis-Aufgabe 21: Funktionalableitung **(8 Zusatzpunkte)**

Für ein Funktional

$$F[x] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t f(x(t)),$$

f stetig differenzierbar, definiert man die *Funktionalableitung* $\frac{\delta F[x]}{\delta x(t)}$ über

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{F[x + \epsilon\varphi] - F[x]}{\epsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\delta F[x]}{\delta x(t)} \varphi(t) \tag{1}$$

für alle Testfunktionen $\varphi(t)$ mit $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$.

Zeigen Sie (z.B. durch Taylorentwicklung von $F[x + \epsilon\varphi]$ in ϵ), dass:

a)
$$\frac{\delta F[x]}{\delta x(t)} = \frac{\partial f(x(t))}{\partial x} \text{ , kurz } \frac{\delta F[x]}{\delta x} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

b)
$$f(x) = g(\dot{x}) \Rightarrow \frac{\delta F[x]}{\delta x} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\right),$$

c)
$$f(x) = l(x, \dot{x}) \Rightarrow \frac{\delta F[x]}{\delta x} = \frac{\partial l}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial l}{\partial \dot{x}}\right),$$

d)
$$f(x) = y\dot{x} - h(x, y) \Rightarrow \frac{\delta F[x, y]}{\delta x} = -\dot{y} - \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\delta F[x, y]}{\delta y} = \dot{x} - \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Schließen Sie aus c) und d) auf die Euler-Lagrange-Gleichung bzw. die Hamilton-Gleichungen.

Aufgabe 22: Doppelmulden-Potential **(8 Punkte)**

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in dem Doppelmulden-Potential

$$V(q) = -aq^2 + bq^4 \quad (a, b > 0).$$

a) (2 Punkte) Wie lauten die Hamiltonschen Gleichungen? Welche Ruhelagen q_0 gibt es, und handelt es sich jeweils um ein Maximum oder ein Minimum des Potentials?

b) (2 Punkte) Für kleine Energien lässt sich das Potential um das jeweilige Minimum entwickeln. Welche Eigenfrequenz erhalten Sie?

c) (2 Punkte) Ein spezieller Fall liegt vor, wenn die Gesamtenergie verschwindet. Warum? Bestimmen Sie dafür die Phasenraumtrajektorie und skizzieren Sie diese.

d) (2 Punkte) Wie sehen die Phasenraumtrajektorien für $E \gg |V(q_0)|$ aus? Skizzieren Sie das gesamte Phasenraumdiagramm.