Fachbereich Physik

Prof. Dr. Cord Müller
Dr. Stefan Gerlach (Übungen)

Universität Konstanz

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2013/14

Konstanz, den 8.1.2014

10.Übungsblatt

(Abgabe am 15.1.2014, Übung am 17.1.2014)

Aufgabe 19: Fermat'sches Prinzip (10 Punkte)

Gemäß dem Fermat'schen Prinzip ist der Weg eines Lichtstrahls zwischen den Punkten P_1, P_2 eine stationäre Bahn der optischen Weglänge

$$S = \int_{\mathrm{P}_1}^{\mathrm{P}_2} n(\mathbf{r})\,\mathrm{d}l$$

in einem Medium mit Brechungsindex $n(\mathbf{r})$.

a) (2 Punkte) In einem Medium mit planarer Symmetrie ist $n(\mathbf{r}) = n(z)$, in kartesischen Koordinaten $\mathbf{r} = (x, y, z) = (\mathbf{s}, z)$. Zeigen Sie $\mathrm{d}l = \mathrm{d}z\sqrt{1 + s'(z)^2} = \mathrm{d}z\sqrt{1 + \tan^2\varphi(z)}$ und leiten Sie damit das Brechungsgesetz her:

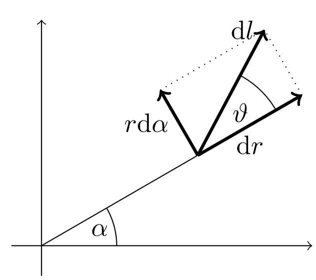
$$n(z_1)\sin\varphi(z_1) = n(z_2)\sin\varphi(z_2). \tag{1}$$

$\varphi(z)$ ist der Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung und der z-Achse.

b) (1 Punkt) **Fata Morgana**: Bei einer starken Temperaturinversion der Luft, mit einer warmen über einer kalten Schicht, kann es zu einer Brechung von Lichtstrahlen zurück zur Erde kommen. Nehmen Sie an, der Brechungsindex nimmt in $[z_1, z_2]$ linear von n_1 auf $n_2 < n_1$ ab und ist ansonsten konstant; vernachlässigen Sie zudem die Erdkrümmung. Ein Objekt am Erdboden ($z = 0$) sende einen Lichtstrahl im Winkel φ_0 aus. Welche Höhe erreicht der Strahl, bevor er zur Erde zurückgelenkt wird? Und wie gross darf der Abstrahlwinkel dafür maximal sein?

c) (2 Punkte) In einem Medium mit Rotationssymmetrie sei $n(\mathbf{r}) = n(r), r = |\mathbf{r}|$. Zeigen Sie mit $\mathrm{d}l = \mathrm{d}r\sqrt{1 + r^2\alpha'(r)^2} = \mathrm{d}r\sqrt{1 + \tan^2\vartheta(r)}$ (siehe Skizze) das Brechungsgesetz in Polarkoordinaten:

$$r_1 n(r_1)\sin\vartheta(r_1) = r_2 n(r_2)\sin\vartheta(r_2). \tag{2}$$



d) (4 Punkte) **Sonnenuntergang**: Auf größerer Skala fällt der Brechungsindex der Erdatmosphäre näherungsweise gemäß der barometrischen Höhenformel mit zunehmendem Abstand $h = r - R$ zum Erdboden ab: $n(h) = 1 + (n_0 - 1)\, e^{-h/h_0}$, mit $h_0 = \frac{\rho_0 g}{p_0} \approx 8,4$ km und $n_0 \approx 1,000292$.

Folgern Sie aus dem Brechungsgesetz, Gl. (2), dass

$$\vartheta' = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}h} \approx -\frac{n'}{n} \tan\vartheta,$$

und finden Sie die Ablenkung $\Delta\vartheta$ der Sonnenstrahlen (Winkel zwischen scheinbarer und echter Richtung der Sonne) durch Integration über h.

Hinweis: $\epsilon = h_0/R \approx 10^{-3}$ ist ein sehr kleiner Parameter. Zeigen Sie

$$\Delta\vartheta = \int_0^\infty \vartheta' \,\mathrm{d}h \approx \frac{n_0 - 1}{n_0} \sin\vartheta_0 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}h}{h_0} \frac{e^{-h/h_0}}{\sqrt{\cos^2\vartheta_0 + 2\epsilon h/h_0}}$$

und unterscheiden Sie zur Auswertung des Integrals zwischen eher senkrechtem Einfall ($\cos^2\vartheta_0 \gg \epsilon$) und tangentialem Einfall ($\cos^2\vartheta_0 \ll \epsilon$).

e) (1 Punkt) Wieviel länger sieht man die Sonne an einem Tag als geometrisch zu erwarten? Berechnen Sie dafür, wie lange man die Sonne noch sieht, nachdem sie schon unter die Tangentialebene an die Erdoberfläche beim Beobachter gesunken ist. Warum erscheint die Sonne am Horizont abgeflacht?

Hinweise: Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass die Sonne senkrecht untergeht, wie z.B. am Äquator bei Tag-und-Nacht-Gleiche. Der Erdradius dort beträgt ca. $R = 6378$ km.