Fachbereich Physik

Prof. Dr. Cord Müller
Dr. Stefan Gerlach (Übungen)

Universität Konstanz

Übungen zur Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2013/14

Konstanz, den 22.10.2013

1.Übungsblatt

(Abgabe am 30.10.2013, Übung am 8.11.2013)

Aufgabe 1: Eigenschaften der Fouriertransformation (13 Punkte)

Die (kontinuierliche) Fouriertransformation $\mathcal{F}(f)$ einer komplexwertigen Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t.$$

a) (8 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Fouriertransformation

i) (Linearität) Für $f(t) = af_1(t) + bf_2(t)$ gilt: $\tilde{f}(\omega) = a\tilde{f}_1(\omega) + b\tilde{f}_2(\omega)$.

ii) Für $f(t)$ reell gilt: $\tilde{f}(\omega) = \tilde{f}^*(-\omega)$.
Ist zusätzlich $f(-t) = f(t)$, also f gerade, so gilt

$$\tilde{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t \, \mathrm{d}t = \tilde{f}(-\omega).$$

Ist zusätzlich $f(-t) = -f(t)$, also f ungerade, so gilt

$$\tilde{f}(\omega) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, \mathrm{d}t = -\tilde{f}(-\omega).$$

iii) (Verschiebungssatz)
Für $g(t) = f(t + t_0)$ gilt $\tilde{g}(\omega) = e^{i\omega t_0} \tilde{f}(\omega)$.
Für $g(t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$ gilt $\tilde{g}(\omega) = \tilde{f}(\omega - \omega_0)$.

iv) (Skalierungssatz)
Für $g(t) = f(at)$ mit $a \neq 0$ gilt $\tilde{g}(\omega) = \frac{1}{|a|} \tilde{f}(\frac{\omega}{a})$.

v) (Differentiation und Multiplikation)
Für $g(t) = f'(t)$ gilt $\tilde{g}(\omega) = i\omega \tilde{f}(\omega)$.
Für $g(t) = tf(t)$ gilt $\tilde{g}(\omega) = i\tilde{f}'(\omega)$.

vi) (Faltungssatz)
Für das *Faltungsprodukt*

$$(f * g)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - s) g(s) \, \mathrm{d}s$$

gilt $\widetilde{(f * g)}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)$.

b) (5 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{f}(\omega)$ für folgende Funktionen. Diskutieren Sie die Ergebnisse von ii) und iii).

i) $\Theta(t)e^{-\alpha t}$ für $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

ii) $f(t) = e^{-\alpha|t|}$ für $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

iii) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-t^2/2\sigma^2}$ für $\sigma > 0$ (Gaussfunktion).

Hinweise: $\Theta(t) = \begin{cases} 1 \ (t > 0) \\ 0 \ (t < 0) \end{cases}$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(t+i\beta)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ für $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

Aufgabe 2: Diracsche δ-Distribution (7 Punkte)

Wir betrachten lineare Funktionale auf Testräumen $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, also stetige Abbildungen $l : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ mit $l(af_1 + bf_2) = al(f_1) + bl(f_2)$. Diese lassen sich mit Hilfe des Grenzwerts einer bestimmten Folge l_n von stetigen Funktionen ausdrücken:

$$l(f) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l_n(t) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Der punktweise Grenzwert $\lim_{n\to\infty} l_n(t)$ kann, muss aber nicht existieren. Man schreibt abkürzend $l(f) = \int_{-\infty}^{\infty} l(t)f(t)\,\mathrm{d}t$ und nennt $l(t)$ eine *Distribution*.
Die Diracsche δ-Distribution $\delta : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0).$$

Als Folge δ_n kann man z.B. die normierten Gaussfunktionen aus Aufgabe 1b)iii) mit der Breite $\sigma_n = 1/n$ verwenden.

a) (4 Punkte) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\tilde{\delta}(\omega)$ von $\delta(t - t_0)$ mit dem Verschiebungssatz und zeigen Sie durch Rücktransformation von $\tilde{\delta}(\omega)$, dass gilt:

$$\delta(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-t_0)}\,\mathrm{d}\omega$$

und damit $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega = 2\pi\delta(t) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(1)$ sowie analog $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\delta(\omega) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(1)$.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie mit a) die Fouriertransformation von

$$f(t) = \sin(\omega_0 t), \quad g(t) = \cos(\omega_0 t).$$

c) (2 Punkte) Leiten Sie die folgenden Eigenschaften der δ-Distribution her:

i) Für $f(t)$ stetig differenzierbar und $f'(t_i) \neq 0$ ($\forall i : f(t_i) = 0$) gilt

$$\delta(f(t)) = \sum_{i: f(t_i)=0} \frac{\delta(t - t_i)}{\mid f'(t_i) \mid}.$$

ii) Die *Distributionsableitung* l' ist definiert über die partielle Integration $l'(f) := -l(f')$ für geeignete f. Zeigen Sie, dass damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t - t_0)\,\mathrm{d}t = (-)^{(n)} f^{(n)}(t_0).$$